MATHEMATIQUES
Suites. Limites de suites : entraînement 3 (corrigé)

Exercice 1

Partie A

1. On calcule, à la calculatrice, u_n pour les premières valeurs de n (valeurs de u_n arrondies) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
u_n	1	1,8	2,44	2,95	3,36	3,69	3,95	4,16	4,33	...

n	...	20	21	22	23	24	25	26	27	28
u_n	...	4,95	4,96	4,97	4,976	4,981	4,985	4,988	4,990	4,992

La suite (u_n) semble croissante et semble converger vers le nombre 5.

2. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$.

Remarque
On peut donner un nom à la propriété que l'on doit démontrer.

- **Initialisation**
Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $5 - 4 \times 0,8^0 = 5 - 4 = 1$. Donc la propriété $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

- **Hérédité**
Soit n un entier naturel fixé quelconque.

On suppose que la propriété est vraie pour le rang n c'est-à -dire $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$ (c'est l'hypothèse de récurrence), et on veut démontrer qu'elle est encore vraie pour le rang $n+1$, c'est-à-dire $u_{n+1} = 5 - 4 \times 0,8^{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0,8u_n + 1 && \text{Par définition de la suite } u. \\ &= 0,8\,(5 - 4 \times 0,8^n) + 1 && \text{On utilise l'hypothèse de récurrence.} \\ &= 0,8 \times 5 - 4 \times 0,8^{n+1} + 1 && \text{On développe et } 0,8 \times 0,8^n = 0,8^{n+1}. \\ &= 4 - 4 \times 0,8^{n+1} + 1 \\ &= 5 - 4 \times 0,8^{n+1} && \text{C'est la propriété au rang } n+1. \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
On a démontré que, pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$.
La propriété $\mathcal{P}_n$ est donc héréditaire pour tout n.

- **Conclusion**
La propriété est vraie pour $n = 0$.
Elle est héréditaire à partir du rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$.

3. • Monotonie de la suite u :

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n &= \left(5-4\times 0,8^{n+1}\right)-\left(5-4\times 0,8^n\right)\\ &= \cancel{5}-4\times 0,8^{n+1}-\cancel{5}+4\times 0,8^n\\ &= 4\times 0,8^n\,(1-0,8) \quad \text{Mise en facteur.}\\ &= 4\times 0,8^n\times 0,2>0\end{aligned}$$

Rappel

Une valeur sûre : pour étudier le sens de variation d'une suite, on étudie le signe de la différence entre deux termes consécutifs quelconque de cette suite $(u_{n+1}-u_n$.
On utilise l'expression de u_n démontrée juste avant.

Pour tout n, on a démontré que $u_{n+1}>u_n$ donc la suite (u_n) est croissante.

• Calcul de la limite de de la suite (u_n).

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}(0,8)^n=0 \text{ Car } -1<0,8<1\\ \text{Par produit : } \lim\limits_{n\to+\infty}-4\times(0,8)^n=0\end{array}\right\}\text{ Par somme, } \lim\limits_{n\to+\infty}5-4\times 0,8^n=5.$$

Donc la suite (u_n) est convergente vers 5.
On peut donc dire que si l'apiculteur rachète chaque année 10 000 abeilles, le nombre d'abeilles va augmenter chaque année et va tendre vers 50 000.

Partie B

1. • On détermine l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n :
Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1}-5c\\ &= 0,8u_n+c-5c \quad \text{On remplace } u_{n+1} \text{ par } 0,8u_n+c\\ &= 0,8u_n-4c \quad \text{On réduit}\\ &= 0,8(\underbrace{v_n+5c}_{u_n})-4c \quad \text{On remplace } u_n \text{ par } v_n+5c.\\ &= 0,8v_n+\cancel{4c}-\cancel{4c} \quad \text{On développe et réduit.}\\ &= 0,8v_n \quad \text{On obtient une forme du type : } q\times v_n\end{aligned}$$

Explications

On exprime u_n en fonction de v_n en utilisant l'égalité : $v_n=u_n-5c$.
On obtient : $u_n=v_n+5c$.

On vient de montrer que (v_n) est une suite géométrique (car cette égalité est vraie pour tous les entiers naturels n) de raison $0,8$.

• $v_0=u_0-5c=1-5c$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q=0,8$ et de premier terme $v_0=1-5c$.

2. La suite (v_n) est géométrique de raison $q=0,8$ et de premier terme $v_0=1-5c$ donc, pour tout n,

$$v_n=v_0\times q^n=(1-5c)\,0,8^n$$

3. Expression de u_n en fonction de n :

$u_n=v_n+5c=(1-5c)\,0,8^n+5c.$

Or $-1<0,8<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-5c)\,0,8^n=0$, donc la suite (u_n) est convergente et a pour limite $5c$.
L'apiculteur veut que le nombre d'abeilles tende vers 100 000 ; il faut donc que $5c=10$, autrement dit que $c=2$.

L'idée

On exprime u_n en fonction de n en utilisant l'égalité : $v_n=u_n-5c$ puis on cherche c de façon que la limite de $_n$ soit 10.

Pour que le nombre d'abeilles tende vers 100 000, il faut que l'apiculteur rachète chaque année 20 000 abeilles.

Exercice 2

1. Formule dans le tableur.

Il faut écrire en B3 la formule `=(A2+1)/(2*A2+4)*B2`.

Attention

N'oubliez pas les parenthèses !

2. a. On peut raisonnablement conjecturer que $v_n = \dfrac{1}{2^n}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

b. On démontre cette conjecture par récurrence :

- **Initialisation :** $v_0 = 1$ et $\dfrac{1}{2^0} = 1$: La propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité :** Soit n un entier naturel fixé quelconque.
  On suppose vraie la propriété au rang n c'est-à-dire $v_n = \dfrac{1}{2^n}$.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= (n+2)u_{n+1} && \text{On remplace } n \text{ par } n+1 \text{ dans } v_n.\\
&= (n+2) \times \left(\frac{n+1}{2n+4}\right)u_n && \text{On remplace } u_{n+1} \text{ par } \left(\frac{n+1}{2n+4}\right)u_n\\
&= \frac{\cancel{(n+2)}(n+1)}{2\cancel{(n+2)}}u_n && \text{On simplifie.}\\
&= \frac{n+1}{2}u_n\\
&= \frac{n+1}{2} \times \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} \times v_n\right)}_{u_n} && \text{On remplace } u_n \text{ par } \frac{1}{n+1} \times v_n \text{ car } v_n = (n+1)u_n.\\
&= \frac{\cancel{n+1}}{2\cancel{(n+1)}}v_n && \text{On simplifie.}\\
&= \frac{1}{2} \times v_n\\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} && \text{Par hypothèse de récurrence.}\\
&= \frac{1}{2^{n+1}} && \text{Propriété au rang } n+1.
\end{aligned}$$

  c'est à dire que la propriété au rang $n+1$ est vraie.

- **Conclusion :** Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{1}{2^n}$.

Sans faire de récurrence

On montre que la suite v est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ en montrant que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$.
On a pour tout entier naturel n :
$v_{n+1} = (n+2)u_{n+1}$ et comme $u_{n+1} = \left(\dfrac{n+1}{2n+4}\right)u_n$, on peut écrire :
$v_{n+1} = (n+2)\left(\dfrac{n+1}{2n+4}\right)u_n = (n+2)\left(\dfrac{n+1}{2(n+2)}\right)u_n = \dfrac{n+1}{2}u_n = \dfrac{1}{2} \times (n+1)u_n = \dfrac{1}{2}v_n$.
La relation $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$, montre que la suite (v_n) est une suite gémétrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1 \times u_0 = 1$.
On a donc pour tout entier naturel n, $\quad v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{2^n}$.

3. Pour tout entier naturel n, $v_n = (n+1)u_n$ soit $u_n = \dfrac{v_n}{n+1} = \dfrac{\frac{1}{2^n}}{n+1} = \dfrac{1}{2^n(n+1)}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \text{ Car } 2>1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty\end{array}\right\} \text{Par produit : } \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n(n+1) = +\infty \left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\end{array}}\right\} \text{Par quotient : } \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n(n+1)} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Exercice 3

1. "Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B." donc

$$a_n + b_n = 2200.$$

2. Au début du $(n+1)$-ième jour, la bassin A contient a_n, on ajoute 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B soit $0,15b_n$ et on enlève 10 % du volume présent dans A au début de la journée :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \underbrace{a_n}_{\substack{\text{Ce que contient}\\ \text{A au début du}\\ \text{(n + 1) ième}\\ \text{jour}}} + \underbrace{0,15b_n}_{\substack{\text{15 \% du volume}\\ \text{de B est}\\ \text{transféré vers A}}} - \underbrace{0,1a_n}_{\substack{\text{10 \% du volume}\\ \text{est transféré}\\ \text{vers B}}} \\ &= a_n + 0,15\underbrace{(2200 - a_n)}_{b_n} - 0,1a_n \quad \text{Car } a_n + b_n = 2200. \\ &= 0,75a_n + 330 \\ &= \frac{3}{4}a_n + 330 \end{aligned}$$

On a bien, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + 330$.

3. Algorithme complété :

```
n ⟵ 0
a ⟵ 800
Tant que a < 1100, faire :
    a ⟵ 0,75a + 330
    n ⟵ n + 1
Fin Tant que
```

4. a. Pour tout entier naturel n, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - 1\,320 && \text{Par définition de } u_n \\ &= \frac{3}{4}a_n + 330 - 1\,320 && \text{Car } a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330. \\ &= \frac{3}{4}a_n - 990 && \text{On réduit.} \\ &= \frac{3}{4}(u_n + 1320) - 990 && \text{Car } a_n = u_n + 1320. \\ &= \frac{3}{4}u_n + 990 - 990 && \text{On développe et réduit.} \\ &= \frac{3}{4}u_n \end{aligned}$$

Pensez-y !

On peut calculer les premiers termes en utilisant la calculatrice pour avoir la raison même si vous vous doutez bien de sa valeur .....

On reconnaît la définition d'une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$.
Son premier terme est $u_0 = a_0 - 1320 = 800 - 1320 = -520$

b. On a donc, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 q^n = -520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Mais, par définition de u_n, on a

$u_n = a_n - 1\,320$ soi $a_n = u_n + 1\,320$ soit $a_n = 1\,320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

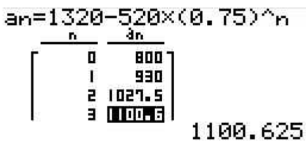
5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.
Si ce jour arrive, on aura $a_n + b_n = 2a_n$.

La conservation du volume global s'écrira alors $2a_n = 2200 \Leftrightarrow a_n = 1100$

Il faut donc résoudre l'équation d'inconnue n :

$$1\,320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1100$$

En utilisant la calculatrice, on obtient :



A la main

Sans calculatrice, la résolution de cette équation nécessite la connaissance de la fonction logarithme népérien.

$1\,320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1100$

$520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 220$

$\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{11}{26}$

$n \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{11}{26}\right)$.

Finalement $n = \dfrac{\ln\left(\frac{11}{26}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 2,99$

On vérifie : $a_3 = 1\,100{,}625$ et $b_3 = 1\,099{,}375$ avec $a_3 - b_3 < 1$. À la fin du troisième jour, les deux bassins auront le même volume au mètre cube près.

Exercice 4

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$, donc $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$.
Or $2n + 3 \geqslant 3 > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Conclusion : la suite (u_n) est strictement croissante.

2. a. Démonstration par récurrence :

- **Initialisation**
  $u_0 = 1 > 0^2$ Donc la propriété est vérifiée pour $n = 0$.

- **Hérédité**
  Soit n un entier naturel fixé quelconque.

  On suppose que la propriété est vraie pour le rang n c'est-à -dire $u_n > n^2$ (c'est l'hypothèse de récurrence), et on veut démontrer qu'elle est encore vraie pour le rang $n+1$, c'est-à-dire $u_{n+1} = (n+1)^2$.

u_{n+1}	$= u_n + 2n + 3$	Par définition de la suite u.
	$> n^2 + 2n + 3$	On utilise l'hypothèse de récurrence.
	$> n^2 + 2n + 1 + 2$	On fait apparaître le développement de $(n+1)^2$.
	$> (n+1)^2 + 2$	
	$> (n+1)^2$	Car $(n+1)^2 + 2 > (n+1)^2$.

  Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**
  La propriété est vraie pour $n = 0$.
  Elle est héréditaire à partir du rang 0.
  Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n.
  Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

b. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ on a par comparaison : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3. On calcule les premiers termes :

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_1 &= u_0 + 3 = 4 \\ u_2 &= u_1 + 2 + 3 = 9 \\ u_3 &= u_2 + 4 + 3 = 16 \\ u_4 &= u_3 + 6 + 3 = 25 \end{aligned}$$

On peut donc conjecturer que $u_n = (n+1)^2$.
Démonstration de la propriété par récurrence :

- **Initialisation**
  $u_0 = 1 = 1^2$ Donc la propriété est vérifiée pour $n = 0$.

- **Hérédité**
  Soit n un entier naturel fixé quelconque.

  On suppose que la propriété est vraie pour le rang n c'est-à -dire $u_n = (n+1)^2$ (c'est l'hypothèse de récurrence), et on veut démontrer qu'elle est encore vraie pour le rang $n+1$, c'est-à-dire $u_{n+1} = (n+2)^2$.

  $$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 2n + 3 && \text{Par définition de la suite } u. \\ &= (n+1)^2 + 2n + 3 && \text{On utilise l'hypothèse de récurrence.} \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 && \text{On développe.} \\ &= n^2 + 4n + 4 && \text{On réduit.} \\ &= (n+2)^2 && \text{Et voilà !} \end{aligned}$$

  Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

- **Conclusion**
  La propriété est vraie pour $n = 0$.
  Elle est héréditaire à partir du rang 0.
  Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n.
  Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n = (n+1)^2$.